Лес Айдана Касымкызы

«Моделирование подземных геофизических полей методами потенциала Гельмгольца»

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D070500 – Математическое и компьютерное моделирования»

Актуальность темы исследования. В современной математической физике, особенно в задачах квантовой механики, акустики и электродинамики, уравнение Гельмгольца является одной из основных моделей. Это уравнение описывает стационарные волновые процессы, и исследование свойств его решений имеет важное теоретическое и прикладное значение. Вопрос существования и единственности решений уравнения Гельмгольца впервые был рассмотрен в работах Зоммерфельда, где для описания решений в неограниченной области было введено условие излучения. Однако при классических условиях Дирихле единственность решения нарушается, что требует введения дополнительных условий. В этом контексте важной научной задачей является замена условия излучения Зоммерфельда эквивалентным граничным условием в ограниченной области. Решение этой задачи позволяет эффективно применять численные методы моделирования и вычислений.

Цель и задачи исследования: – исследование фундаментальных решений уравнения Гельмгольца в пространстве;
– замена условий излучения Зоммерфельда интегральными граничными условиями в ограниченной области;
– доказательство свойств потенциала Гельмгольца в условиях;
– корректная постановка задачи Зоммерфельда в многомерном пространстве;
– определение прозрачных граничных условий в бесконечных цилиндрических областях;
– нахождение условий определения плотности эллиптических потенциалов;
– разработка и реализация численных алгоритмов для двумерных задач.

Научная новизна исследования: – получено фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в пространстве и описано его асимптотическое поведение при чётном nnn;
– доказана эквивалентность потенциала Гельмгольца дифференциальному уравнению и специальному интегральному граничному условию для любого;
– задача Зоммерфельда обобщена на многомерное пространство и показана её эквивалентность потенциалу Гельмгольца;
– найдены аналитический вид прозрачных граничных условий и их асимптотика для бесконечных полуцилиндрических областей;
– получены необходимые и достаточные условия для определения плотности

многомерных эллиптических потенциалов;
– предложен и реализован эффективный численный метод для двумерного уравнения Гельмгольца.

Методы исследования. В работе использованы методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, функционального анализа, теории интегральных операторов, теории потенциалов, теории обобщённых функций и теории специальных функций. Также применялись методы граничных интегральных уравнений и численного анализа.

Теоретическая значимость исследования. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории эллиптических дифференциальных уравнений в многомерных пространствах. Новые эквивалентные постановки для уравнения Гельмгольца углубляют теоретическую базу и задают направление дальнейших исследований. Работа носит в основном теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в пространстве. Кроме того, результаты работы могут применяться в естественных науках, особенно в геофизике при решении различных задач в скважинах.

Практическая значимость исследования. Результаты исследования могут быть использованы в прикладных областях, таких как геофизика, акустика и распространение электромагнитных волн. В частности, возможны применения при моделировании волновых полей в скважинах, исследовании недр и решении инженерных задач.

Апробация работы.Основные результаты исследования были представлены на следующих конференциях:

1. Кальменов Т.Ш., Лес А.К.Определение плотности эллиптического потенциала. Международной конференции. Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры. (EMJ-2019).
2. Кальменов Т.Ш., Лес А.К.Спектральное разложение потенциала Гельмгольца. Традиционная международная научная апрельская конференция, посвященная дню работников науки, 3-5 апреля, 2019 г.
3. Кальменов Т.Ш.,Лес А.К.Задача Зоммерфельда и обратная задача для уравнения Гельмгольца. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования , (Алматы - 2020 год).
4. Искакова У.,Лес А.К.Об одной переопределенной задаче для уравнения Лаврентьева - Бицадзе. Международной научной конференции посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева (24–

26 октября 2024 года, Ташкент, Узбекистан). – Ташкент. Изд–во "Маърифат". 2024.166 с

5. Кальменов Т.Ш., Лес А.К.Задача Зоммерфельда в бесконечном полуцилиндре. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки и 80-летия Института математики и математического моделирования, 1–4 апреля 2025 г.

Публикации.

1. T.S. Kalmenov , S.I. Kabanikhin and Aidana Les. The Sommerfeld problem and inverse problem for the Helmholtz equation.Journal Inverse Ill-Posed Probl, 2021; 29(1): 49–64. h-index=2. Web of Science Impact factor=1.1 (Q1) DOI:10.1515/jiip-2020-0033
2. T.S. Kalmenov, A.K. Les and U. A. Iskakova. Determination of density of elliptic potential.Eurasian mathematical journal, ISSN 2077-9879, Vol. 12, N. 4 (2021), (Q3) p.43-52. DOI: 10.32523/2077-9879-2021-12-4-43-52

В список статей, предложенный Комитетом по обеспечению качества в науке и высшем образовании Министерства образования и науки Республики Казахстан, включены следующие публикации:

T.S.Kalmenov and A.K.Les. Boundary condition of volume potential and its application to inverse problem.Kazakh Mathematical Journal, ISSN 2413–6468 19:4 (2019) p.71–78

Структура и объём диссертации. Диссертация написана на казахском языке и представлена в виде рукописи. Она состоит из титульного листа, содержания, введения, четырёх основных разделов, заключения и списка использованной литературы. Общий объём работы – 96 страниц, включая 29 рисунков и 1 приложение.

Основное содержание диссертации. Физический смысл потенциала как закона всемирного тяготения изучал Исаак Ньютон. Гаусс изучал электромагнитные поля с помощью этого потенциала, а учёные, которые развили его дальше, — Лагранж, Лаплас, Грин, Соболев и др. С помощью потенциала Ньютона можно решать задачи математической физики — задачу Дирихле, задачу Неймана и многие другие. Потенциал Ньютона оказал большое влияние на создание новой программы в математике — теории общих функций и развитие теорем индукции. В настоящее время объёмные потенциалы широко используются для решения краевых задач эллиптических уравнений второго порядка теоретического и прикладного значения.

В первой главе В математической физике волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u} - a^2\Delta_x\tilde{u} = \tilde{f}(x,t) \qquad (1)$$

В исследовании используется его фундаментальное решение. Здесь $\Delta_x \tilde{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2}$ - оператор Лапласа. Уравнения (1) $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\delta^{(1)}(t) + u_1(x)\delta(t)$общее решение задачи Коши записывается в виде кластера

$$\tilde{u}(x,t) = \left(\varepsilon * \tilde{f}\right)(x,t) \tag{2}$$

Решение функций (2) здесь дается формулой Кирхгофа$f \in C^2(t \geq 0),\ u_0 \in C^3(R^3),\ u_1 \in C^2(R^3)$.

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x,at)} \frac{f\left(\xi, t - \left|\frac{x-\xi}{a}\right|\right)}{|x-\xi|} d\xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x,at)} \tilde{u}_1(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S(x,at)} \tilde{u}_0(\xi) dS\right] \tag{3}$$

Изучить свойства времени по формуле (3) очень сложно. Поэтому на практике изучаются свойства солитонных (независимых волновых) решений. Если $\tilde{u}(x,t) = e^{ikt}u(x),\ \tilde{f}(x,t) = e^{ikt}f(x)$ мы $|x| \to \infty$ подставим, то $\tilde{u}(x,t)$уравнение (1) сводится к следующему уравнению Гельмгольца

$$Lu = -\Delta_x u - k^2 u = f(x),\ \ x \in R^3 \tag{4}$$

В этом главе построено фундаментальное решение уравнения Гельмгольца через функции Макдональда.

Во второй главе Доказана эквивалентность потенциала Гельмгольца граничному значению для любого числа k.

В третьей главе R^n является одновременно нечетномерным (n = 2s + 3) и четномерным (n = 2s). уникальность решения задачи Зоммерфельда в пространстве и Зоммерфельд в случае излучения с конечным основанием потенциал в конечной области условий излучения Немецкий физик Зоммерфельд первым изучил проблемы квантовой механики и распространения электромагнитных волн в пространстве, доказав эквивалентность граничного условия . При каких условиях уравнение Гельмгольца существует на бесконечности в пространстве?

I - Зоммерфельда. R^3 в уравнение Гельмгольца

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x),\ \ x \in R^3$$

найти решение, удовлетворяющее этим условиям на бесконечности

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x)|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d}, \quad \lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku\right|_{|x|=d} \leq \frac{M}{d^2}$$

II - Зоммерфельда В R^3 уравнение Гельмгольца

$$-\Delta_x u - k^2 u = f(x), \;\; x \in R^3$$

найти решение, удовлетворяющее этим условиям на бесконечности

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x)|_{|x|=d} \le \frac{M}{d}, \quad \lim_{|x|\to\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial |x|} + iku\right|_{|x|=d} \le \frac{M}{d^2} \qquad (3)$$

В работе Зоммерфельд показал, что если $suppf \subset \Omega$, Ω ограниченная область, то задача I и задача II Зоммерфельда имеют единственное решение. Результат Зоммерфельда поднимает следующую проблему: Ωкакое условие можно использовать для замены задачи I Зоммерфельда в ограниченной области, то есть как Ω можно заменить условие отражения Зоммерфельда граничным условием в ограниченной области? Если такое условие найдено, то можно легко найти численное решение задачи Зоммерфельда. В этой главе доказано, что это условие является граничным условием потенциала Гельмгольца.

В четвертый главе Основная цель четвертого раздела — представить численные эксперименты по задаче Гельмгольца и потенциалу Гельмгольца в указанной области для двумерного случая, то есть, во-первых, показать соответствие между краевой задачей и ее аналитическим решением, и, во-вторых, показать численными методами, что плотность обратной задачи, поставленной к потенциалу Гельмгольца, является единственной. Сначала рассмотрим одномерные аналоги задач. При решении нелокальных краевых задач численными методами ошибка приближенного решения значительно выше, чем у локальных задач. Поэтому использование точного решения для нелокальных задач дает более эффективные и точные результаты. Поскольку предложенный метод позволяет получить точное выражение решения, ошибки приближения, возникающие при численной реализации нелокальных задач, полностью исключаются. В этом отношении данный метод является эффективным инструментом, обеспечивающим высокую точность и стабильность при решении нелокальных краевых задач. Существует граничное условие потенциала для уравнения Гельмгольца. Решение задачи получено на основе численных результатов .

Заключение. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца построено в многомерных пространствах с использованием функций Макдональда. Доказана эквивалентность потенциала Гельмгольца граничной задаче для любого. Обоснована единственность решения задачи Зоммерфельда в многомерном пространстве и эквивалентность условия излучения потенциальному граничному условию в ограниченной области. Найдено решение задачи в цилиндрической области и определена плотность эллиптического потенциала. Также получены численные результаты для двумерного уравнения Гельмгольца.